準非拡大写像族に関する共通不動点への強収束定理 (非線形解析学と凸解析学の研究)

茨木, 貴徳

数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 156-162

準非拡大写像族に関する共通不動点への強収束定理
(STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR FINDING A COMMON FIXED POINT OF GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
鶴岡工業高等専門学校 総合科学学科
(DEPARTMENT OF GENERAL SCIENCE, TSURUOKA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY)

1. はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^r$ を H の空でない閉凸集合の族で $C_0=\cap_{i=1}^r C_i$ が空集合でないとする. このとき, 画像復元問題 (problem of image recovery) とは H から C_i の上への距離射影 (metric projection) P_{C_i} $(i=1,2,\ldots,r)$ のみを用いた点列近似法で C_0 の元 z を求める問題である. ここで, H から C_i の上への距離射影 P_{C_i} とは, 任意の $x\in H$ に対して次で定義される.

$$P_{C_i}(x)=\operatorname*{argmin}_{y\in C_i}\|x-y\|.$$

この距離射影は次の重要な性質を持っている. すなわち $x\in H$ と $z\in C_i$ に対して, $z=P_{C_i}x$ であることの必要十分条件は, 任意の C_i の元 y に対して

$$\langle x-z,z-y\rangle\geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると P_{C_i} は非拡大射影 (nonexpansive retraction), すなわち任意の $x,y\in H$ に対して

$$\|P_{C_i}x-P_{C_i}y\|\leq\|x-y\|$$

かつ, 任意の C_i の元 z に対して $P_{C_i}z=z$ であることがわかる. すなわち, $F(P_{C_i})=C_i$ が成り立つ. ここで, $F(P_{C_i})$ は P_{C_i} の不動点全体の集合を表す. つまり, 有限次元ユークリッド空間やヒルベルト空間における画像復元問題は非拡大写像族の共通不動点を求める問題に帰着できる.

距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の 2 つの射影は古くから知られていた. 1996 年に Alber [2] は第 3 の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した. さらに近年, 茨木-高橋 [8,9] は第 4 の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらの射影はヒルベルト空間上の距離射影の自然な拡張になっている. それはこれらの射影の性質を比較してみるとよくわかる. 比較しやすいよう E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. C を E の閉凸集合とし, P_C,Π_C,Q_C,R_C をそれぞれ E から C の上への距離射影, 準距離射影, サニー非拡大射影, サニー準非拡大射影とする. このとき, E の元 x と C の元 x_0 に対して,

$$\begin{aligned}
x_0=P_Cx &\Leftrightarrow \langle J(x-x_0),x_0-y\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C,\\
x_0=\Pi_Cx &\Leftrightarrow \langle Jx-Jx_0,x_0-y\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C,\\
x_0=Q_Cx &\Leftrightarrow \langle x-x_0,J(x_0-y)\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C,\\
x_0=R_Cx &\Leftrightarrow \langle x-x_0,Jx_0-Jy\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C
\end{aligned}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, Secondary 47H10, 47J25.
Key words and phrases. 準非拡大写像, サニー準非拡大射影, 共通不動点, ハイブリッド法, 縮小射影法.

である. ただし, J は E の双対写像 (duality mapping) である. ヒルベルト空間上での距離射影の重要な性質 (1.1) を考慮すると, これら4つの非線形射影はバナッハ空間への拡張と考えたとき自然な拡張であると言えよう. 実際, この4つの射影をヒルベルト空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる. なぜなら, ヒルベルト空間では双対写像 J は恒等写像 I となり, この4つの性質は (1.1) と一致するからである ([8,9] を参照). さらに, これらの非線形射影はヒルベルト空間と同様に非拡大の性質を持っている.

距離射影	$\Rightarrow$	距離写像 (metric operator)
準距離射影	$\Rightarrow$	擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping)
サニー非拡大射影	$\Rightarrow$	非拡大写像 (nonexpansive mapping)
サニー準非拡大射影	$\Rightarrow$	準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping)

一方, バナッハ空間の非拡大写像族の共通不動点を求める手法には, 高橋 [29], 高橋-下地 [32] によって研究された非拡大写像族から生成される W-写像 (W-mapping) とよばれる非線形写像を用いる手法や, Aharoni-Censor [1], 吉川-高橋 [18] によって研究された非拡大写像族から生成されるブロック写像 (block mapping) とよばれる非線形写像を用いる手法がある. また, 非拡大写像の不動点を求めるために2つの有名な近似法がある. 2003年に中條-高橋 [24] は Solodov-Svaiter [27] にヒントを得て, ヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合 C から C への非拡大写像 T の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ H_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x - x_n, x_n - z\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし, $P_{H_n\cap W_n}$ は C から $H_n \cap W_n$ の上への距離射影 (metric projection) とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, $P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である. この手法はハイブリッド法 (hybrid method) と呼ばれている. 2008年には高橋-竹内-窪田 [33] が中條-高橋 [24] にヒントを得て非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \ Q_1 = C \ \& \ x_1 = P_{Q_1}x_0 \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし, P_{Q_n} は H から Q_n の上への距離射影とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, $P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である. この手法は縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれている.

本論文では, W-写像及びブロック写像の2つの写像とハイブリッド法及び縮小射影法の2つの不動点近似法を利用してバナッハ空間上の有限個の準非拡大写像族に対する共通不動点への点列近似法を議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x+y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([5, 30, 31] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
(2) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
すなわち, $x \neq y \;\Rightarrow\; Jx \cap Jy = \emptyset$;
(3) E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(4) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(5) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
(6) E が一様に滑らかであるための必要十分条件は, E^* が一様凸となることである;
(7) E が一様に滑らかならば, J は E の有界集合上で一様連続になる.

3. 準非拡大写像とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([2, 17, 22] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 y に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x, y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([8, 9] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. C の元 p が T の 準漸近的不動点 (generalized asymptotic fixed point) であるとは, Jx_n が Jp に弱 * 位相の意味で収束し $\lim_{n\to\infty}(Jx_n - JTx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の準漸近的不動点の集合を $\check{F}(T)$ で表す. 準非拡大写像の準漸近的不動点に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([15,21]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \check{F}(T)$ となる.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.2 ([8,9]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([8,9] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の結果が知られている.

定理 3.3 ([19]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D はサニー準非拡大レトラクトである;
(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

定理 3.4 ([15]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $\check{F}(R) = F(R) = D$ が成り立つ.

定理 3.5 ([15]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. このとき, $F(T)$ はサニー準非拡大レトラクトである.

定理 3.6 ([16]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $\mathcal{T}$ を E から E への準非拡大写像の族とする. このとき, $F(\mathcal{T})$ はサニー準非拡大レトラクトである. ただし, $F(\mathcal{T})$ は $\mathcal{T}$ の共通不動点全体の集合である.

4. 強収束定理

本節では, ハイブリッド法と縮小射影法を用いた準非拡大写像族の共通不動点への強収束定理を議論する. まず初めに, W-写像の概念を利用した近似法を議論する.

高橋 [29] は有限個の非拡大写像の共通不動点を求めるために有限個の写像の凸結合からなる W-写像 (W-mapping) という写像を導入した. C をバナッハ空間 E の空でない凸集合と

し, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を r 個の実数で $0 \le \alpha_i \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 W を

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1-\alpha_1) I, \\ U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1-\alpha_2) I, \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1-\alpha_{r-1}) I, \\ W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1-\alpha_r) I \end{aligned}$$

で定義する ([29, 32] を参照). このような写像 W は, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-写像といわれる. この W-写像とハイブリッド法及び縮小射影法を利用して次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 4.1 ([16]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \check{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる E から E への r 個の準非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $(0, 1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$ を満たし, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ に対して $\alpha_{n,i} \ne 1$ を満たすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = W_n x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x - x_n, Jx_n - Jz \rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)} x$ に強収束する. ここで, $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)}$ は E から $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.2 ([16]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \check{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる E から E への r 個の準非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $(0, 1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$ を満たし, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ に対して $\alpha_{n,i} \ne 1$ を満たすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = W_n x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)} x$ に強収束する. ここで, $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)}$ は E から $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

次にブロック写像の概念を利用した近似法を議論する. C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ と $\{\omega(i)\}_{i=1}^r$ を $[0, 1]$ の部分集合とし, $\sum_{i=1}^r \omega(i) = 1$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 B を

$$B = \sum_{i=1}^r \omega(i) \Big(\alpha_i I + (1-\alpha_i) T_i \Big)$$

で定義する ([1, 18] を参照). このような写像 B は, $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 及び $\omega(1)$, $\omega(2)$, ..., $\omega(r)$ によって生成されるブロック写像と呼ばれる. このブロック写像とハイブリッド法及び縮小射影法を利用して次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 4.3 ([16]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \check{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる E から E への r 個の準非拡大写像とする. 集合 $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\} \subset [0, 1)$ と集合 $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\} \subset (1, 0]$ を, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty} \omega_n(i) > 0$ を満たし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{i=1}^r \omega_n(i) = 1$ を満たすとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, B_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成される ブロック写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$,

$$\begin{cases} y_n = B_n x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x - x_n, Jx_n - Jz\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)} x$ に強収束する. ここで, $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)}$ は E から $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.4 ([16]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \check{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる E から E への r 個の準非拡大写像とする. 集合 $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\} \subset [0, 1)$ と集合 $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\} \subset (1, 0]$ を, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty} \omega_n(i) > 0$ を満たし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{i=1}^r \omega_n(i) = 1$ を満たすとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, B_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成される ブロック写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = B_n x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

とする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)} x$ に強収束する. ここで, $R_{\cap_{i=1}^r F(T_i)}$ は E から $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

References

[1] R. Aharoni and Y. Censor, *Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl. **120** (1989), 165–175.

[2] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[3] D. Butnariu and Y. Censor, *On the behavior of a block-iterative projection method for solving convex feasibility problems*, Int. J. Comput. Math. **34** (1990), 79–94.

[4] D. Butnariu and Y. Censor, *Strong convergence of almost simultaneous block-iterative projection methods in Hilbert spaces*, J. Comput. Appl. Math. **53** (1994), 33–42.

[5] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[6] N. Cohen and T. Kutscher, *On spherical convergence, convexity, and block iterative projection algorithms in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 271–291.

[7] S. D. Flåm and J. Zowe, *Relaxed outer projections, weighted averages and convex feasibility*, BIT **30** (1990), 289–300.

[8] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007) 929–944.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces* Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (2008), 362–375.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorems for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, Indian J. Math., **50**, (2008), 415–428.

[13] 茨木貴徳・高橋渉, 「準非拡大写像族の共通不動点への弱収束定理とその応用」京都大学数理解析研究所講究録 **1615** (2008), 57–66.

[14] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 71–81.

[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization, Contemp. Math., **513**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169–180.

[16] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for finite generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., to appear.

[17] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[18] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the block iterative method in Banach spaces*, Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl. **5** (2004), 59–66.

[19] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2007** (2007), Article ID 21972, 18 pp.

[21] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[22] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257-266.

[23] K. Nakajo K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[24] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.

[25] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[26] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[27] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189–202.

[28] K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications* Taiwanese J. Math. **5** (2001), 387–404.

[29] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A **51** (1997), 277-292.

[30] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[31] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[32] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modeling **32** (2000), 1463–1471.

[33] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[34] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[35] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.